

31/03

П.5. Метод Эйлера

Предназначен по-прежнему д/реш-а
ЗК $\frac{du}{dt} = f(u(t)), t > 0,$

$$u(0) = u_0$$

Вводим стандарт. равномерн. сетку по времени: $t_n = \tau n$, $\tau = \frac{T}{n}$, где T - время, д/д ищется реш-е

Т.о., точки t_n , $n = 0, 1, \dots$, - заданы.

* отрезок $[t_n, t_{n+1}]$ и проинтегрируем
исходн. ур-ние по нему: $u(t_{n+1}) - u(t_n) =$
 $= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t)) dt$ (*)

Основная идея:] известные знач-а $f(u(t))$
в k последовательных т. из $\{t_n\}$. Тогда
интерполируем $f(u(t))$ по этим точкам

полиномом $L_{k-1}(t)$ и вычислим J на $[t_n, t_{n+1}]$
от этого полинома, и получим некотор. рас-
четные ф-лы.

2 случая: явные и неявные методы.

① Явные методы. А/интерполяции бу-
дем испол-ть точки: $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n+1-k}$, т.е.
 $\{t_{n+1-i}\}, i = \overline{1, k}$. Запишем интерполяц. мно-
гочлен степени $(k-1)$ по этим т. ф/ф-ции
 $f(u(t))$: $f(u(t)) \sim L_{k-1}(t) = \sum_{i=1}^k f(u(t_{n+1-i})) Q_{k-1,i}(t)$
где $Q_{k-1,i}(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{t - t_{n+1-j}}{t_{n+1-i} - t_{n+1-j}}$, — это интерполяц.

многочлен в форме Лагранжа. Т.о., ур-ние
(*) запишется так: $u(t_{n+1}) - u(t_n) \sim$
 $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^k f(u(t_{n+1-i})) Q_{k-1,i}(t) dt$.

Будем обозн. знач-я сеточ. ф-ции в т. t_n
как u_n (как и раньше), знач-е $f(u_n) = f_n =$
 $= f(t_n)$

Тогда можно записать след. числен. ал-
горитм: $u_{n+1} - u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^k f(t_{n+1-i}) Q_{k-1,i}(t) dt$
Вычислим J в правой части:
 $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^k f(t_{n+1-i}) Q_{k-1,i}(t) dt = \sum_{i=1}^k f(t_{n+1-i}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_{k-1,i}(t) dt =$

$$= \sum_{i=1}^k f(t_{n+1-i}) b_i, \text{ где } b_i = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_{k-1,i}(t) dt =$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{t - t_{n+1-j}}{t_{n+1-i} - t_{n+1-j}} dt = h \int_0^1 \frac{t - t_{n+1-j}}{t_{n+1-i} - t_{n+1-j}} d\theta, dt = \tau d\theta,$$

$$\theta \in [0, 1] \Rightarrow \tau \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\tau t + \theta \tau - \tau(n+1-j)}{\tau(n+1-i) - \tau(n+1-j)} d\theta = \tau.$$

$$\int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{n+1-\theta - n-1+j}{n+1-i - n-1+j} d\theta = \tau \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\theta - 1 + j}{j - i} d\theta$$

Вкончателно получаем расчетн. ф-лу:

$$u_{n+1} - u_n = \tau \sum_{i=1}^k b_i f(t_{n+1-i}), \text{ где } b_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\theta - 1 + j}{j - i} d\theta,$$

$i = \overline{1, k}$ // τ из ф-лы g/b_i перенесено в лев. член

Если известны $f(t_n), f(t_{n-1}), \dots, f(t_{n+1-k})$ — u_n — известны, то значение $u_{n+1} = u_n + \tau \sum_{i=1}^k b_i f(t_{n+1-i})$ вычисл-ся явным образом и просто

Основная проблема методов Адамса

Для вычисл-я знач-я u_{n+1} треб-ся знать знач-я $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n+1-k}$ — k штук, тогда как в ЭК, на 1м шаге, известно только 1 знач-е $u(0) = u_0$

В связи с этим, с начала применения процедуры метода Адамса необх. каким-либо образом, например, методами Р-К,

получить "разнонные" k знач-й y_i !!

Достоинства метода

В отличие от методов Р-К, в А на каждом шаге нужно вычислить знач-е ф-ции много раз в разн. промежут. Т. (что можно сделать, if прав. часть задана аналитически или ее можно достаточно просто посчитать в ЧТ.), в методе Адамса вычисление знач-й прав. части осуществляется 1 раз.

Особенность

Методы Адамса обладают "инерционностью" — каждое новое знач-е ф-ции зависит от многих предыдущих.

② Неявный метод Адамса. Интерполяция прав. части осущ-ся по $(k+1)$ точке, включая Т. $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n+1-k}$.
 $\{t_{n+1-i}\}, i=0, k$

Тем самым, интерполяц. многочлен имеет уже степень k .

В остальном, построение вычислит. algo.

метод не отличается от "явного случая":

$$U_{n+1} - U_n = \tau \sum_{i=0}^k b_i f(t_{n+1-i}), \quad b_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{\theta - 1 + j}{j - i} d\theta, \quad i=0, k$$

Особенность

Д/т.о., чтобы найти U_{n+1} , нужно решить, вообще говоря, нелинейн. ур-ние: $U_{n+1} = U_n + \tau \sum_{i=0}^k b_i f(U_{n+1-i})$ или $U_{n+1} = U_n + \tau b_0 f(U_{n+1}) + \tau \sum_{i=1}^k b_i f(U_{n+1-i})$

Преимущества // будут в Тп. "Устойчивость"

Простые примеры методов Адамса

Явные методы

1 $k=1; \quad U_{n+1} - U_n = \tau b_1 f(U_n)$

$$b_1 = \int_0^1 1 d\theta = 1$$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f(U_n)$ — явный метод Эйлера

2 $k=2; \quad U_{n+1} - U_n = \tau [f(U_n) b_1 + f(U_{n-1}) b_2]$

$$b_1 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^2 \frac{\theta - 1 + j}{j - 1} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta - 1 + 2}{2 - 1} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta + 1}{1} d\theta = \frac{3}{2}$$

$$b_2 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^2 \frac{\theta - 1 + j}{j - 2} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta}{1 - 2} d\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \frac{3}{2} f(U_n) - \frac{1}{2} f(U_{n-1})$$

3 $k=3; \quad U_{n+1} - U_n = \tau [b_1 f(U_n) + b_2 f(U_{n-1}) + b_3 f(U_{n-2})]$

$$b_1 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{\theta - 1 + j}{j - 1} d\theta = \int_0^1 \frac{(\theta - 1 + 2)(\theta - 1 + 3)}{(2-1)(3-1)} d\theta = \int_0^1 \frac{(\theta+1)(\theta+2)}{2} d\theta = \frac{23}{12}$$

$$b_2 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{\theta - 1 + j}{j - 2} d\theta = \int_0^1 \frac{(\theta - 1 + 1)(\theta - 1 + 3)}{(1-2)(3-2)} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta(\theta+2)}{-1} d\theta = -\frac{4}{3}$$

$$b_3 = \int_0^1 \frac{(\theta - 1 + 1)(\theta - 1 + 2)}{(3-1)(3-2)} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta(\theta+1)}{2} d\theta = \frac{5}{12}$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \frac{23}{12} f(u_n) - \frac{4}{3} f(u_{n-1}) + \frac{5}{12} f(u_{n-2})$$

Заметим, что во всех случаях $\sum_{i=1}^k b_i = 1$:
 $[k=1] \Rightarrow b_1 = 1$; $[k=2] \Rightarrow b_1 + b_2 = 1$; $[k=3] \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 = 1$

Так, собственно, и должно быть из соображений точности ф-лы хотя бы $g/f \neq \text{const}$

Неявные методы

[1] $k=0$; $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(u_{n+1})$ — неявный метод Эйлера

$$[2] k=1; b_0 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^1 \frac{\theta - 1 + j}{j - 0} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta}{1} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^1 \frac{\theta - 1 + j}{j - 1} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta - 1}{\theta - 1} d\theta = \frac{1}{2}$$

$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \frac{1}{2} (f(u_{n+1}) + f(u_n))$ — знакомая схема, уже было

3) $k=2$; $U_{n+1} - U_n = \tau [b_0 f'(U_{n+1}) + b_1 f'(U_n) + b_2 f'(U_{n-1})]$

$$b_0 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{\theta - 1 + j}{j - 0} d\theta = \int_0^1 \frac{\theta(\theta+1)}{1 \cdot 2} d\theta = \frac{5}{12}$$

$$b_1 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{\theta - 1 + j}{j - 1} d\theta = \int_0^1 \frac{(\theta-1)(\theta+1)}{(-1) \cdot 1} d\theta = \frac{2}{3}$$

$$b_2 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{\theta - 1 + j}{j - 2} d\theta = \int_0^1 \frac{(\theta-1)\theta}{(-2)(-1)} d\theta = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \frac{5}{12} f'(U_{n+1}) + \frac{2}{3} f'(U_n) - \frac{1}{12} f'(U_{n-1})$$

П.6. Методы Тунга (Метод Гунтера-Нунга назад)

По-прежнему реш-ся ОД: $\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u), t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

Будем исп-ть те же обознач-я, что и раньше, и ту же сетку $t_n = h \tau n$.

Идея метода

В отличие от пред. мет-ва, будем интерп-ть полиномом не прав. часть, а само реш-е. т.е. приблизим $u(t)$ полиномом по точкам $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n+1-k} \Leftrightarrow \{t_{n+1-i}, i = \overline{0, k}\}$

$\nexists (k+1)$ точка; соответствующий интерполяц. многочлен будет иметь степень k . $u(t) \sim$

$$\approx L_k(t) = \sum_{i=0}^k u(t_{n+1-i}) Q_{k,i}(t), \text{ где } Q_{k,i}(t) =$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{t - t_{n+1-j}}{t_{n+1-i} - t_{n+1-j}}$$

Подставим это предположение $q/u(t)$ в дифференциальное уравнение: $\sum_{i=0}^k Q'_{k,i}(t) u(t_{n+1-i}) \approx f(\sum_{i=0}^k Q_{k,i}(t) u(t_{n+1-i}))$

Потребуем, чтобы это соотношение было точным уравнением в т. t_{n+1} , т.е. в той т., в которой на данном шаге ищется решение u_{n+1} :

$$\boxed{\sum_{i=0}^k Q'_{k,i}(t)|_{t=t_{n+1}} \cdot u(t_{n+1-i}) = f(u_{n+1})} \quad (*)$$

// базовая идея

Традиционная замена: $t = t_n + \theta \tau$, $\theta \in [0, 1]$,
 $t|_{\theta=1} = t_n + \tau$.

Тогда $\frac{dQ_{k,i}(t)}{dt} = Q'_{k,i}(t) = \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\theta} Q_{k,i}(\theta) = \frac{1}{\tau} Q'_{k,i,\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow (*)$ переписывается в виде: $\boxed{\sum_{i=0}^k Q'_{k,i,\theta}|_{\theta=1} \cdot u_{n+1-i} = \tau f(u_{n+1})}$, где $Q_{k,i} = 1$ получено в мет. Адамса

$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{\theta - 1 + j}{j - i}$, — это и есть ф-ла Тунга

* простейшие вар-ты:

$\boxed{k=1}$ $Q_{1,0} = \frac{\theta - 1 + 0}{1 - 0} = \theta$, $Q'_{1,0} = 1$

$Q_{1,1} = \frac{\theta - 1 + 1}{0 - 1} = 1 - \theta$, $Q'_{1,1} = -1$

$$1 \cdot U_{n+1} - 1 \cdot U_n = \tau f(U_{n+1}) \Leftrightarrow \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f(U_{n+1})$$

— неявный метод Эйлера (снова)

$$\boxed{k=2} \quad Q'_{k,0}(\theta)|_{\theta=1} \cdot U_{n+1} + Q'_{k,1}(\theta)|_{\theta=1} U_n + Q'_{k,2}(\theta)|_{\theta=1} \cdot$$

$$U_{n-1} = \tau f(U_{n+1})$$

$$Q_{2,0} = \prod_{j=0}^2 \frac{\theta-1+j}{j-0} = \frac{\theta(\theta+1)}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}(\theta+1)\theta, \quad Q'_{2,0}|_{\theta=1} = \frac{3}{2}$$

$$Q_{2,1} = \prod_{j=0}^2 \frac{\theta-1+j}{j-1} = \frac{(\theta-1)(\theta+1)}{-1} = \frac{\theta^2-1}{-1}, \quad Q'_{2,1}|_{\theta=1} = -2$$

$$Q_{2,2} = \prod_{j=0}^2 \frac{\theta-1+j}{j-2} = \frac{(\theta-1)\theta}{2}, \quad Q'_{2,2}|_{\theta=1} = \frac{1}{2}$$

Получаем: $\frac{3}{2}U_{n+1} - 2U_n + \frac{1}{2}U_{n-1} = \tau f(U_{n+1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3U_{n+1} - 4U_n + U_{n-1}}{2\tau} = f(U_{n+1})} \text{ — оп-ла Эйлера } g/k=2$$

Ее можно преобр-ть: $\left[\frac{3}{2}U_{n+1} - 2U_n + \frac{1}{2}U_{n-1} \right] \frac{1}{\tau} = f(U_{n+1})$

Сгруппируем слагаемые след образом:

$$\frac{1}{\tau} \left[U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1} + \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_{n-1} \right] = f(U_{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2\tau} + \tau \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\tau^2} = f(U_{n+1})$$

Последнее можно переписать в наших обознач-х (см. ранее): $\boxed{U_{\tau} + \tau U_{\tau\tau} = f(U_{n+1})}$ (вы-

зывает ассоциации с рез-ми метода неопред. корр.
(тоб)

! Эти Методы Тира принципиально
новые